Άσκηση 22/11/2018

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=(x+y+z-1)^2$
1) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $a\in\mathbb{R}$ το σύνολο $f^{-1}(a)$, $a\neq 0$ είναι κανονική επιφάνεια 2) Το ίδιο ερώτημα για την $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με $g(x,y,z)=x^2yz$

Λύση

1) Αναζητώ τα κρίσιμα σημεία της f λύνοντας το σύστημα

$$f_x=f_y=f_z=0 \Leftrightarrow 2(x+y+z-1)=0 \Leftrightarrow x+y+z=1$$

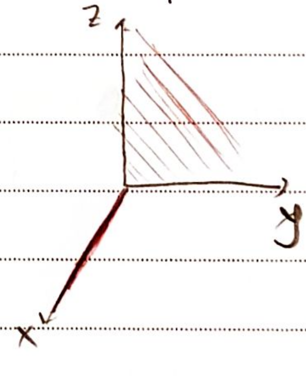
Άρα, το σύνολο των κρίσιμων σημείων της f είναι το επίπεδο $\Pi: x+y+z=1$. $\boxed{\text{Αν } a>0}$, τότε το $f^{-1}(a)$ δεν περιέχει κανένα κρίσιμο σημείο και επομένως το $f^{-1}(a)$ είναι κανονική επιφάνεια

$$f^{-1}(a)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x+y+z-1)^2=a\}$$
$$=\Pi_1\cup\Pi_2,\quad \Pi_1: x+y+z-1=\sqrt{a}$$
$$\Pi_2: x+y+z-1=\sqrt{a}$$

$\boxed{\text{Αν } a=0}$, τότε $f^{-1}(0)=\Pi$ είναι κανονικής επιφάνειας.

2) Αναζητώ τα κρίσιμα σημεία της g λύνοντας το σύστημα

$$g_x=g_y=g_z=0 \Leftrightarrow 2xyz=x^2z=x^2y=0$$

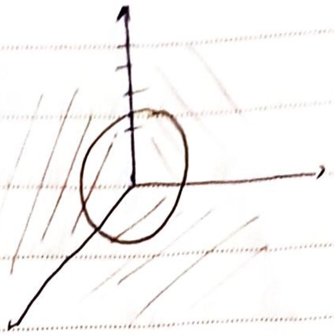


Άρα, το σύνολο των κρίσιμων σημείων της g είναι το $Oyz\cup Ox$

$$g^{-1}(a)=\{(x,y,z) \mid x^2yz=a\}$$

• $\boxed{\text{Αν } a\neq 0}$, τότε το $g^{-1}(a)$ δεν περιέχει κανένα κρίσιμο σημείο, επομένως είναι κανονική επιφάνεια βάσει του θεωρήματος

$\boxed{\cdot \text{Αν } a=0}$, $g(0)=\{(x,y,z) \mid x^2yz=0\}$
$= Oxy \cup Oxz \cup Oyz$



Δεν είναι κανονική επιφάνεια

Άσκηση: Θεωρώ καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ με φυσική παράμετρο και καμπυλότητα $k(s) \neq 0$ $\forall s \in I$. Ορίζω την παραμετρική επιφάνεια $X: I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $X(s,u) = c(s) + u\vec{n}(s)$. Είναι κανονική;

Λύση

Η X είναι λεία και $X_s(s,v) = \dot{c}(s) + v\dot{\vec{n}}(s) =$
$= \vec{t}(s) + v(-k(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s))$

$X_s(s,v) = (1 - v(k(s))\vec{t}(s) + v\tau(s)\vec{b}(s)$
$X_v(s,v) = \vec{n}(s)$

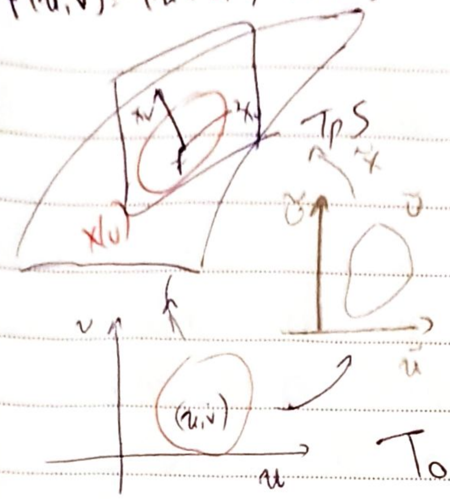
$X_s \times X_v(s,v) = (1-vk(s))\vec{t}(s) \times \vec{n}(s) + v\tau(s)\vec{b}(s) \times \vec{n}(s)$
$= (1-vk(s))\vec{b}(s) + v\tau(s)\vec{t}(s)$

$$X_s \times X_v(s,v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-vk(s) = 0 \\ \text{και} \\ v\tau(s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{1}{k(s)} \\ v\tau(s) = 0 \end{cases}$$

Η X δεν είναι κανονική στο σύνολο $\{(s,v) \in I \times \mathbb{R} \mid v = \frac{1}{k(s)}, \tau(s) = 0\}$

$f = \tilde{X}^{-1} \circ X$ λεία

$f(u,v) = (\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v))$



Έστω S κανονική επιφάνεια και $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u,v) \in U$.

$P = X(u,v)$. Τα διανύσματα $\{X_u(u,v), X_v(u,v)\}$ είναι βάση του T_pS. Τότε $X_u \times X_v(u,v) \perp T_pS$

Το διάνυσμα $N(p) = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(\tilde{x}(p))$ είναι ένα από τα δύο μοναδιαία κάθετα διανύσματα του T_pS

Έχω ορίσει την απεικόνιση $N: X(U) \to \mathbb{R}^3$, $N = \dfrac{(X_u \times X_v)}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}$ είναι διαφο/μη

Έστω $\tilde{X}, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to S$ αλλά ένα ακόμα σύστημα με $X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U}) \neq 0$)

$\tilde{N} : \tilde{X}(\tilde{U}) \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{U} = \dfrac{\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\|} \circ \tilde{X}^{-1}$

$\tilde{X} \circ \phi = X \to X(u,v) = X(\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v))$

$$\left.\begin{cases} X_u = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial u} X_{\tilde{u}} + \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \tilde{X}_{\tilde{v}} \\[2ex] X_v = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{u}} + \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{v}} \end{cases}\right\} \Rightarrow X_u \times X_v = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{v}} \times \tilde{X}_{\tilde{u}}$$

$$= \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \right) \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}} \Rightarrow$$

$$X_u \times X_v = \frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}$$

$$\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1} = \frac{\dfrac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}}{\left|\dfrac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}\right|} \frac{\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\|} \circ \tilde{X}^{-1} \Rightarrow \tilde{N} = \pm N$$

Προσανατολισιμες - Προσανατολισμένες Επιφάνειες

Ορισμός

i) Μια κανονική επιφάνεια καλείται **προσανατολίσιμη** αν-ν υπάρχει διαφορίσιμη απεικόνιση $N: S \to \mathbb{R}^3$ ώστε $\forall p \in S$, $N(p)$ είναι μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο T_pS (Το N θα το καλώ προσανατολισμό)

ii) Η S καλείται **προσανατολισμένη** αν-ν είναι προσανατολίσιμη και έχουμε επιλέξει έναν προσανατολισμό.

Παρατήρηση: Τοπικά σε κάθε επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη

Παραδείγματα: Επιφάνειες Γραφήματα : είναι προσανατολίσιμες διότι καλύπτονται από ΕΝΑ μόνο σύστημα συν/ων

$X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S = \Gamma_h \quad h: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad X(u,v) = (u, v, h(u,v))$

$X_u = (1, 0, h_u) \quad , \quad X_v = (0, 1, h_v)$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \end{vmatrix} = (-h_u, h_v, 1)$$

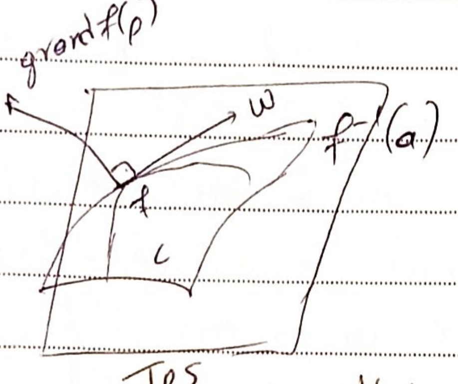
Συμπέρασμα: Το γράφημα Γ_h είναι προσανατολισμένη επιφάνεια με προσανατολισμό $N: \Gamma_h \to \mathbb{R}^3$

$$N(u, v, h(u,v)) = \frac{(-h_u(u,v), -h_v(u,v), 1)}{\sqrt{h_u^2(u,v) + h_v^2(u,v) + 1}}$$

Θεώρημα

Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεία και $a \in f(U)$. Αν το σύνολο $f^{-1}(a)$ δεν περιέχει κρίσιμα σημεία της f τότε το $f^{-1}(\alpha)$ είναι προσανατολίσιμη με προσανατολισμό $N: f^{-1}(a) \to \mathbb{R}^3$

$$N(p) = \frac{\text{grand} f(p)}{\|\text{grand} f(p)\|}, \quad \forall p \in f^{-1}(a)$$



Απόδειξη

Θεωρώ $w \in T_pS$ και καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to f^{-1}(\alpha)$ με $c(0) = P = (x_0, y_0, z_0)$ και $c'(0) = w = (w_1, w_2, w_3)$

$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon): c(t) \in f^{-1}(a) \Rightarrow f(c(t)) = a$$

$$\Leftrightarrow f(x(t), y(t), z(t)) = a, \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(f(x(t), y(t), z(t))\right) = 0$$

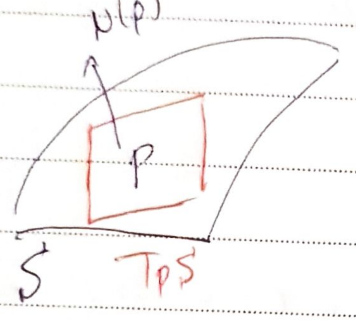
$$\Rightarrow x'(t) f_x(x(t), y(t), z(t)) + y'(t) f_y(\ldots) + z'(t) f_z(\ldots) = 0$$

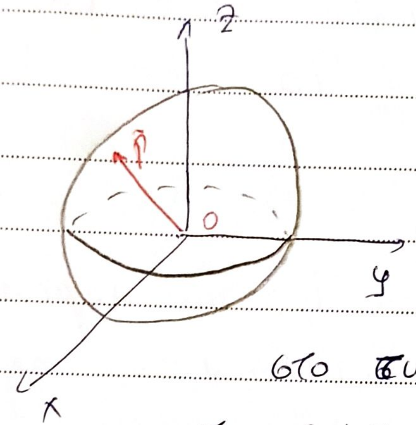
$$\overset{t=0}{\Rightarrow} x'(0) f_x(p) + y'(0) f_y(p) + z'(0) f_z(p) = 0$$

$$\Rightarrow w_1 f_x(p) + w_2 f_y(p) + w_3 f_z(p) = 0 \Leftrightarrow \langle w, \text{grand} f(p) \rangle = 0$$

Απεικόνιση Gauß (ή σφαιρική απεικόνιση)

Ορισμός: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με προσ/μο $N: S \to \mathbb{R}^3$





$$S^2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2=1\}$$

Η απεικόνιση Gauß της S είναι η απεικόνιση $N: S \to S^2$ η οποία στο τυχαίο σημείο $p\in S$ αντιστοιχεί το σημείο $\bar{p}\in S^2$ ώστε το διάνυσμα θέσης του $\bar{p}$ (με αφετηρία το κέντρο της S^2) να είναι το $N(p)$

$\vec{O\bar{P}} = N(p)$

Παραδείγματα

1) Θεωρώ το επίπεδο $\Pi: Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$

$(A,B,\Gamma)\neq(0,0,0)$ $\quad \Pi = f^{-1}(0)$, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=Ax+By+\Gamma z+\Delta$

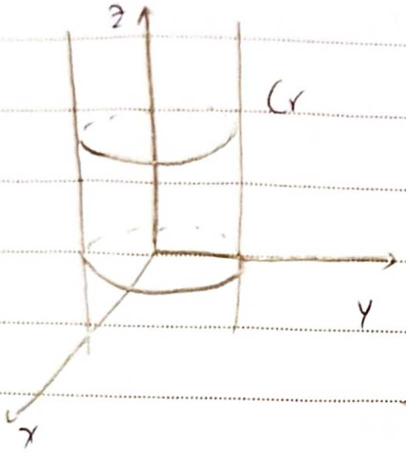
Το Π είναι προσανατολισμένη με προσανατολισμό N, με

$$p\in\Pi, \quad N(p)=\frac{\operatorname{grad} f(p)}{\|\operatorname{grad} f(p)\|}=\frac{(A,B,\Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

Άρα, η απεικόνιση Gauss είναι $N:\Pi\to S^2$

$$N(p)=\frac{(A,B,\Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}, \quad p\in S$$

2) Θεωρώ τον ορθό κυκλικό κύλινδρο $C_r: x^2+y^2=r^2$.

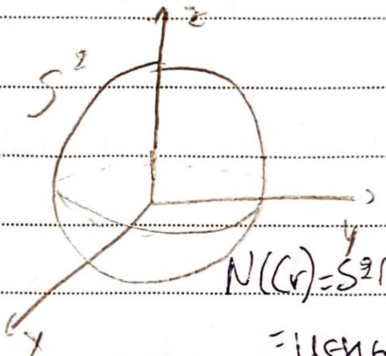


$C_r = f^{-1}(0)$ όπου $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = x^2+y^2-r^2$. Άρα, ο κύλινδρος C_r είναι προσ/μενη επιφάνεια με μοναδιαίο κάθετο στο τυχαίο $p \in C_r$

N $N(p) = \dfrac{\operatorname{grad} f(p)}{\|\operatorname{grad} f(p)\|}$, $p \in (x,y,z)$

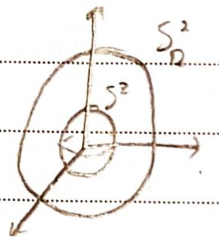
$$N(p) = \frac{(2x,2y,0)}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}} = \frac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



$$N(p) = N(x,y,z) = \frac{1}{r}(x,y,0)$$

$N(C_r) = S^2 \cap Oxy =$
$=$ μέγιστος κύκλος

Άρα, η απεικόνιση Gauß είναι $N: C_r \to S^2$
$N(p) = N(x,y,z) = \frac{1}{r}(x,y,0)$, $p(x,y,z) \in C_r$



3) $S^2_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\}$, $R>0$
$= f^{-1}(0)$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2$

Η S^2_R είναι προσανατολισμένη επιφάνεια με μοναδιαίο κάθετο στο $P=(x,y,z) \in S^2_R$

$$N(P) = \frac{\operatorname{grad} f(P)}{\|\operatorname{grad} f(P)\|} = \frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{R^2}} =$$

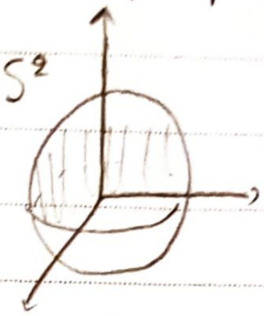
$$= \frac{1}{R}(x,y,z)$$

Άρα, η απεικόνιση Gauß της S^2_R είναι $N: S^2_R \to S^2$, $N(x,y,z) = \frac{1}{R}(x,y,z)$

4) Γραφήματα

$S = \Gamma_h$, $h: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι προσανατολισμένη με μοναδιαίο κάθετο στο τυχαίο $P = (x, y, h(x,y))$

$$N(p) = \frac{(-h_x(x,y), -h_y(x,y), 1)}{\sqrt{h_x^2(x,y) + h_y^2(x,y) + 1}}$$



Η απεικόνιση Gauß της Γh είναι η $N: \Gamma h \to S^2$

$$N(x, y, h(x,y)) = \frac{(-h_x(x,y), -h_y(x,y), 1)}{\sqrt{}}$$

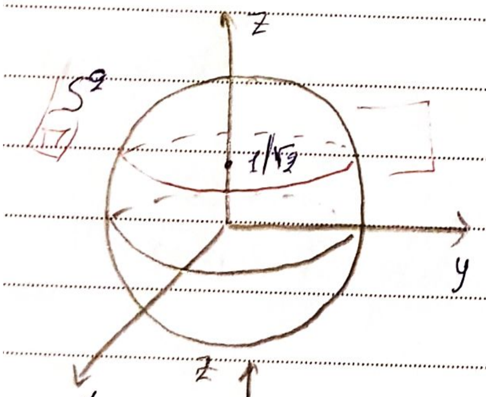
$N(\Gamma h) \subset S^2_+$ άνω ημισφαίριο $S^2 \cap \{z > 0\}$

Άσκηση: Να βρεθεί η απεικόνιση Gauß της επιφάνειας S με εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Να περιγραφεί γεωμετρικά η εικόνα της.

Λύση

Η S είναι επιφάνεια γράφημα της $h: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
Η απεικόνιση Gauß αυτής είναι η $N: S \to S^2$ με

$$N(x, y, \sqrt{x^2+y^2}) = \frac{\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}(\sqrt{x^2+y^2})}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



Τα σημεία της εικόνας $N(s)$ περιέχονται στο επίπεδο $\Pi: z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Απεικόνιση Weingarten ή τελεστής σχήματος

Ορισμός: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με επιφάνεια Gauß $N: S \to S^2$. Καλούμε απεικόνιση Weingarten (ή τελεστή σχήματος) της S στο σημείο της P τη γραμμική απεικόνιση $L_p = -dN_p$

$$T_pS \to T_pS^2$$

άρα $L_p : T_pS \to T_pS$

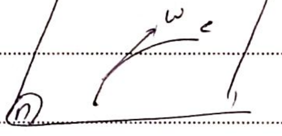
Παραδείγματα

1) $\Pi: Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ με απεικόνιση Gauß $N: \Pi \to S^2$

$N(p) = \frac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}, \quad p \in \Pi$

$L_p: T_p\Pi \to T_p\Pi \quad w \in T_p\Pi \quad c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Pi \quad c(0) = p, \quad c'(0) = w$

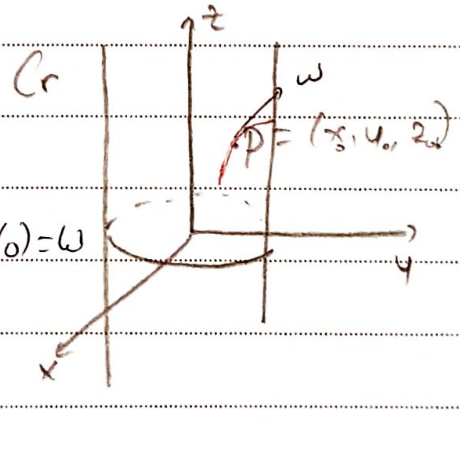
$L_p w = -dN_p(w) = -(N \circ c)'(0) = 0$



$$\boxed{L_p = 0 \quad \forall \, p \in \Pi}$$

2) Κύλινδρος $C_r: x^2 + y^2 = r^2$. Η απεικόνιση Gauß είναι η $N: C_r \to S^2$.

$N(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, 0), \quad (x, y, z) \in C_r$



$L_p: T_pC_r \to T_pC_r, \quad w \in T_pC_r$

$w = (w_1, w_2, w_3)$ Θεωρώ $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to C_r, \ c(0) = p, \ c'(0) = w$

$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$L_p(w) = -dN_p(w) = -(N \circ c)'(0)$

$N \circ c(t) = N(c(t)) = N(x(t), y(t), z(t)) = \frac{1}{r}(x(t), y(t), 0)$

$(N \circ c)'(0) = \frac{1}{r}(x'(0), y'(0), 0)$

$$\boxed{\text{Άρα, } L_p w = L_p(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0), \quad w = (w_1, w_2, w_3) \in T_pC_r}$$

- Πώς θα βρω το $T_p C_r = ??$

Διέρχεται από το σημείο $P = (x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο $N(p) = \frac{1}{r}(x_0, y_0, 0)$

$$T_p C_r = \{ w = (w_1, w_2, w_3 \in T_p \mathbb{R}^3 \ / \ \langle w, N(p) \rangle = 0 \}$$

$$T_p C_r = \{ w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p \mathbb{R}^3 \ | \ x_0 w_1 + y_0 w_2 = 0 \}$$

- Για $w_3 = 0$, έχω $L_p(w_1, w_2, 0) = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0)$ — $\frac{1}{r}$ = καμπυλότητα κύκλου

- Για $w_1 = w_2 = 0$ έχω $L_p(0, 0, w_3) = 0 \, (0, 0, w_3)$ — 0 = καμπυλότητα ευθείας